NOVEMBER/DECEMBER 2025

FMA63 — COMPLEX ANALYSIS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks



SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Define Analytic function.

   பகுமுறைச் சார்பு வரையறுக்க.

2. Define continuity of $f(z)$.

   $f(z)$ -இன் தொடர்ச்சியை வரையறுக்க.

3. Find the fixed points of the mapping $w = \dfrac{6z-9}{z}$.

   $w = \dfrac{6z-9}{z}$ -இன் நிலையான புள்ளிகளைக் காண்க.

4. Write bilinear transformation formula.

   இருபடி நேரியல் உருமாற்ற சூத்திரத்தை எழுதுக.

2134

5. State Cauchy's integral formula.

காஷேயின் தொகையீட்டு சூத்திரத்தை கூறுக.

6. Evaluate : $\int_C \frac{3z^2+7z+1}{(z+1)} dz$ where C is the circle $|z| = \frac{1}{2}$.

மதிப்பிடுக : $\int_C \frac{3z^2+7z+1}{(z+1)} dz$. இங்கு C என்பது வட்டம் $|z| = \frac{1}{2}$.

7. Define removable singularity.

விலக்கத்தக்க சிறப்புப் புள்ளி வரையறுக்க.

8. State Cauchy's Residue theorem.

காஷேயின் எச்சத் தேற்றத்தைக் கூறுக.

9. Define contour integration.

விளிம்பு தொகையிடல் வரையறுக்க.

10. Define improper integral.

முறையற்ற தொகையிடல் வரையறுக்க.

19. Find the Laurent's series of $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+5z+6}$ value in the region $2 < |z| < 3$.

$2 < |z| < 3$ பிராந்தியத்தில் $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+5z+6}$ மதிப்பினை லாரன்சின் தொடரைக் கொண்டுக் கண்டறியவும்.

20. Evaluate : $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$.

மதிப்பிடுக : $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If $u = e^x \sin y$, find $f(z) = u + iv$.

$u = e^x \sin y$, எனில் $f(z) = u + iv$ என்பதைக் காண்க.

17. Determine the bilinear transformation that maps the points $-1, 0, 1$ in the Z-plane onto the points $0, i, 3i$ in the W-plane.

W-என்ற தளத்தில் $0, i, 3i$ புள்ளிகள் மீது Z-என்ற தளத்தில் $-1, 0, 1$ புள்ளிகளை வரைபடமாக்கும் இருபடி நேரியல் உருமாற்றத்தைக் காண்க.

18. Evaluate using Cauchy's integral formula $\int_C \frac{z+1}{(z-3)(z-1)} dz$ where C is the circle $|z| = 2$.

காஷேயின் தொகையீட்டு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\int_C \frac{z+1}{(z-3)(z-1)} dz$ -யை மதிப்பிடுக. இங்கு C என்பது வட்டம் $|z| = 2$ ஆகும்.



SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Determine the analytic function $w = u + iv$ if $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$.

$u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ எனில் $w = u + iv$ -யை பகுமுறைச் சார்பு எனத் தீர்மானிக்கவும்.

Or

(b) Show that the function $f(z) = z|z|$ is not analytic anywhere.

$f(z) = z|z|$ எங்கும் பகுமுறைச் சார்பு அல்ல என நிறுவுக.

12. (a) Find the bilinear transformation which maps the points $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$ into $w_1 = 0, w_2 = i, w_3 = 3i$ respectively.

$z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$ ஆகிவற்றை முறையே $w_1 = 0, w_2 = i, w_3 = 3i$ எனில் வரைபடமாக்கும் இருபடி நேரியல் உருமாற்றத்தைக் காண்க.

Or

(b) Find the image of $x=2$ under transformation $w=\frac{1}{z}$.

$w=\frac{1}{z}$ என்ற உருமாற்றத்தின் கீழ் $x=2$-ன் பிம்பத்தைக் காண்க.

13. (a) Evaluate $\int_C \sin z\,dz$, along the line $z=0$ to $z=i$.

$z=0$ விலிருந்து $z=i$ வரையிலான நேர்க்கோட்டில் $\int_C \sin z\,dz$ ஐ மதிப்பிடுக.

Or

(b) Evaluate using Cauchy's integral formula $\int_C \frac{\sin 3z}{z+\left(\frac{\pi}{2}\right)}dz$ if C is the circle $|z|=5$.

காஷேயின் தொகையீட்டு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\int_C \frac{\sin 3z}{z+\left(\frac{\pi}{2}\right)}dz$ யை மதிப்பிடுக.

இங்கு C என்பது வட்டம் $|z|=5$ ஆகும்.

14. (a) Expand $\cos(z)$ as a Taylor's series about the point $z=0$.

$z=0$ என்ற புள்ளியைப் பற்றிய டெய்லரின் தொடராக $\cos(z)$ ஐ விரிவாக்குக.

Or

(b) Find that $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ at $z=0$ has a removable singularity.

$z=0$ என்றப் புள்ளியில் $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ ஆனது விலக்கத்தக்க சிறப்புப் புள்ளியைக் கொண்டுள்ளது என்பதைக் காண்க.

15. (a) Evaluate $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$.

மதிப்பிடுக : $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$.

Or

(b) Evaluate $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\sin\theta+a^2}, 0<a<1$.

மதிப்பிடுக : $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\sin\theta+a^2}, 0<a<1$.